

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ
„ADOLF HAIMOVICI”

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA - 7 FEBRUARIE 2026

CLASA a XI-a

H2

Filiera Teoretică: Profilul Real – Specializarea Științe ale naturii

1. (21p) Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2ax + a - 1, & x \leq 1 \\ a^2x^2 + ax, & x > 1 \end{cases}$, unde a este un număr real.

a) (5p) Determinați numărul real a pentru care funcția f este continuă în $x = 1$.

b) (10p) Pentru $a = -2$, calculați $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x) + x})$.

c) (5p) Pentru $a = -1$, arătați că ecuația $f(x) + 5^x = 0$ are cel puțin o soluție în intervalul $[-1, 0]$.

2. (21p) În $M_2(\mathbb{R})$ se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} a-4 & 3 \\ 8 & a-6 \end{pmatrix}$ și $B = A - A^2 + A^3 - A^4 + \dots - A^{2026}$.

a) (5 p) Pentru $a = 10$, determinați numărul întreg m pentru care $A^2 = mA$.

b) (5 p) Pentru $a = 10$, determinați matricea B .

c) (10p) Determinați matricea $A = \begin{pmatrix} a-4 & 3 \\ 8 & a-6 \end{pmatrix}$ care verifică relația $A^2 = 2A + 24I_2$.

3. a) (10p) Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0, c < 0$ și funcția $f: \mathbb{R} - \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|ax^2 + bx + c|}{x-1}$.

Determinați a, b, c , astfel încât $f(0) = -2$, iar dreapta h având ecuația $y = x + 2$ să fie asimptotă oblică la ramura spre $+\infty$ a graficului funcției f .

b) (10p) Calculați $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 2x} + \dots + \sqrt{x^2 + nx} + nx)$.

4. a) (15p) Într-un proiect de amenajare a unui parc urban, un arhitect trebuie să verifice dacă trei stâlpi de iluminat, poziționați pentru a ilumina o alee dreaptă, sunt aliniați perfect, echidistant, pe o linie dreaptă. Acest lucru este esențial pentru a optimiza cablul electric subteran, care trebuie să urmeze o traiectorie liniară minimă, reducând astfel costurile. Coordonatele stâlpilor în planul parcului, măsurate

față de un punct de referință fix sunt: stâlpul 1 – punctul $A(2,3)$, stâlpul 2 – punctul $B(5,7)$ și stâlpul 3 – punctul $C(8, 11)$.

La ce concluzie a ajuns arhitectul: acești trei stâlpi sunt coliniari și echidistanți ?

b) (15p) În cadrul aceluiași proiect, arhitectul trebuie să amenajeze un parc în formă triunghiulară, delimitat de punctele A, B, C , unde $A(2,3)$, $B(2m+1,2)$ și $C(3,2m+2)$. Pentru optimizarea costurilor de amenajare, inclusiv cantitatea de gazon sau pavaj necesar, arhitectul trebuie să determine coordonatele punctelor B și C astfel încât aria terenului triunghiular ABC să fie minimă.

Care sunt coordonatele punctelor B și C găsite de arhitect?

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Se acordă 10 puncte din oficiu.

3. Timp de lucru 3 ore.